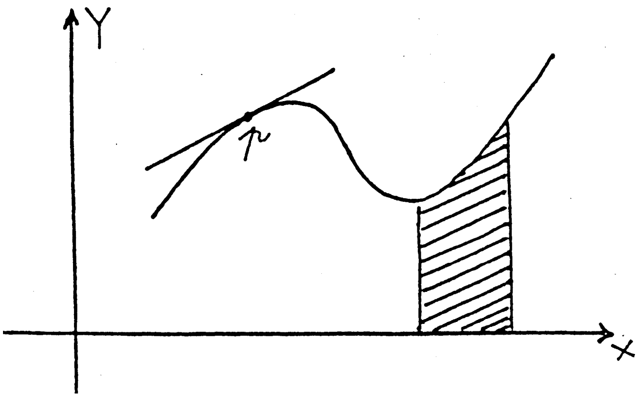
Inhoudstafel

Hoofdstuk 1
Begrippen uit de topologie

1.1. Inleiding

Dit lespakket en de volgende lespakketten bevatten de leerstof analyse. Vanaf het ogenblik dat wiskundigen problemen i.v.m. beweging wilden oplossen, ontstond er een nieuwe wiskunde, dikwijls infinitesimaalrekenen genoemd.
In de analyse onderzoeken we het verloop d.i. de verandering van een willekeurige reële functie. Denken we aan het verloop van een lineaire en van een kwadratische functie bestudeerd in de Lespakketten A5 en A8 van de cursus wiskunde basis – H.S.O. Hiervoor definiëren we begrippen zoals continuïteit (“vloeiend” verloop), limiet (waarde waartoe we “oneindig dicht naderen”), afgeleide (“helling”, “maat voor verandering”), integralen (o.a. “oppervlakte”).
In twee problemen van meetkundige aard komen we tot de kern van de analyse :
De grafiek van een functie is gegeven. Hoe bepalen we dan
1) de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek in een punt p (d.w.z. de helling van de grafiek) ?
2) de oppervlakte van het gearceerde gebied ?



Het eerste probleem wordt opgelost in de differentiaalrekening, het tweede in de integraalrekening. Het eerder onverwachte verband tussen beide problemen werd ontdekt door de beroemde wiskundigen Isaac Newton en Gottfried Leibniz op het einde van de 17de eeuw.
In dit hoofdstuk bestuderen we enkele begrippen i.v.m. reële getallen en reële functies, de bouwstenen van de analyse.
We wijzen erop dat sommige onderdelen van dit lespakket en van de volgende lespakketten ook zonder bewijs waarde hebben : de eigenschappen kunnen toepassen is belangrijker.

1.2. Absolute waarde van een reëel getal. Eigenschappen.

De verzameling van de reële getallen is fundamenteel bij de studies van reële functies. De reële getallen werden uitvoerig behandeld in Lespakket A1 van de cursus wiskunde basis – H.S.O.

Herhalen we vlug de samenvatting uit Lespakket A1

$\mathbb{R}, +, \cdot$ is een veld

$\Updownarrow$

1. $\mathbb{R}, +$ is een commutatieve groep (→ 5 voorwaarden)
2. $\mathbb{R}_0, \cdot$ is een commutatieve groep (→ 5 voorwaarden)
3. "·" is distributief t.o.v. "+".

$\mathbb{R}, \leq$ is een totaal geordende verzameling

$\forall\, a \in \mathbb{R}$:	$a \leq a$	(reflexiviteit)
$\forall\, a, b \in \mathbb{R}$:	$a \leq b$ en $b \leq a \Leftrightarrow a = b$	(antisymmetrie)
$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$:	$a \leq b$ en $b \leq c \Rightarrow a \leq c$	(transitiviteit)
$\forall\, a, b \in \mathbb{R}$:	$a \leq b$ of $b \leq a$	(totaal geordende verzameling)

$\mathbb{R}, +, \cdot \leq$ is een geordend veld

$\Updownarrow$

1. $\mathbb{R}, +, \cdot$ is een veld
2. $\mathbb{R}, \leq$ is een totaal geordende verzameling
3. De orde is verenigbaar met de optelling :
   $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$
4. Het product van twee positieve getallen ($\neq 0$) is opnieuw een positief getal ($\neq 0$).

In dit lespakket en in de volgende lespakketten gebruiken we geregeld de absolute waarde van een reëel getal.

1.2.1. Definitie

De *absolute waarde* van een reëel getal x, notatie $|x|$, definiëren we als volgt :

$|x| = x$ als $x \geq 0$

en $|x| = -x$ als $x \leq 0$

Voorbeelden

$|5| = 5$

$|-4| = 4$

Merken we op dat $4 = -(-4)$, dus , $|-4| = -(-4)$.

M.a.w. $|x| = -x$ als $x \leq 0$ (Hier is $x = -4$).

1.2.2. Eigenschappen van absolute waarden

In elk van de volgende tabellen hebben we één kolom ingevuld. In de A.C.O. die volgen vragen we de andere kolommen in te vullen. Zo overtuigen we ons van de verschillende eigenschappen die we zonder bewijs aanvaarden.

1.2.2.1.

x	$-3{,}5$	$2{,}1$	-3	$3{,}4$	-8	$-\sqrt{3}$
y	8	-4	-5	$6{,}6$	2	$\frac{3}{7}$
$\lvert x\rvert$	$3{,}5$					
$-x$	$3{,}5$					
$\lvert -x\rvert$	$3{,}5$					
$-\lvert x\rvert$	$-3{,}5$					
$\lvert y\rvert$	8					
$\lvert -y\rvert$	8					
$-\lvert y\rvert$	-8					

A.C.O. 1

Vul kolom 2, 3, 4, 5 en 6 in, in de tabel bij 1.2.2.1.

Wat stellen we vast ?
De absolute waarde van een reëel getal is niet negatief. In symbolentaal :

$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R} : \lvert x\rvert \geq 0}$

Tegengestelde reële getallen hebben dezelfde absolute waarde.

$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R} : \lvert -x\rvert = \lvert x\rvert}$

1.2.2.2.

In de tabel bij 1.2.2.1. hebben we voor twee reële getallen x en y o.a. $\lvert x\rvert$, $\lvert y\rvert$ en $-\lvert y\rvert$ berekend. We herhalen hier deze resultaten en berekenen ook $\lvert x + y\rvert$, $\lvert x - y\rvert$, ... :

x	– 3,5	2,1	– 3	3,4	– 8
y	8	– 4	– 5	6,6	2
|x|	3,5				
|y|	8				
– |y|	– 8				
x + y	4,5				
|x + y|	4,5				
x – y	– 11,5				
|x – y|	11,5				
|x| + |y|	11,5				

A.C.O. 2

Vul de kolommen 2, 3, 4 en 5 in, in de tabel bij 1.2.2.2.

In deze tabel vinden we dat de *absolute waarde van een som* van twee reële getallen kleiner dan of gelijk is aan de som van de absolute waarden van die reële getallen.
In symbolentaal :

$\boxed{\forall\, x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|}$

Zo is in de eerste kolom $|x + y| = 4{,}5$ en $|x| + |y| = 11{,}5$.

Ook vinden we zo :

$\boxed{\forall\, x, y \in \mathbb{R} : |x - y| \leq |x| + |y|}$

1.2.2.3.

Zoals in 1.2.2.1. en 1.2.2.2. gaan we nu na welk verband er bestaat tussen de *absolute waarde van een product* van twee getallen en de absolute waarde van die getallen. Dezelfde vraag beantwoorden we voor de *absolute waarde van een quotiënt* van twee getallen.

x	– 3,5	2,1	– 3	3,4	– 8
y	8	– 4	– 5	6,6	2
$\lvert x\rvert$	3,5				
$\lvert y\rvert$	8				
$x \cdot y$	– 28				
$\lvert x \cdot y\rvert$	28				
$\lvert x\rvert \cdot \lvert y\rvert$	28				
$\dfrac{x}{y}$	$-\dfrac{7}{16}$ $= -0{,}4375$				
$\left\lvert\dfrac{x}{y}\right\rvert$	$\dfrac{7}{16}$				
$\dfrac{\lvert x\rvert}{\lvert y\rvert}$	$\dfrac{7}{16}$				

In kolom 1 is $-3{,}5 : 8 = -\dfrac{35}{80} = -\dfrac{7}{16} = -0{,}4375$.

A.C.O. 3

Vul de kolommen 2, 3, 4 en 5 in, in de tabel bij 1.2.2.3.

Uit de tabel in A.C.O. 3 blijken de volgende eigenschappen :
De absolute waarde van een product van twee reële getallen is gelijk aan het product van de absolute waarden van die getallen.

In symbolentaal :

$$\boxed{\forall\, x, y \in \mathbb{R} : \lvert x \cdot y\rvert = \lvert x\rvert \cdot \lvert y\rvert}$$

De absolute waarde van een quotiënt van twee reële getallen is gelijk aan het quotiënt van de absolute waarden van die getallen.

In symbolentaal :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}_0 : \left\lvert\frac{x}{y}\right\rvert = \frac{\lvert x\rvert}{\lvert y\rvert}}$$

1.2.2.4.

Besluiten we met een eigenschap die ons toelaat bepaalde ongelijkheden met absolute waarden te vervangen door ongelijkheden met reële getallen zonder absolute waarde en ook omgekeerd.

Eigenschap
Als $x \in \mathbb{R}$ en $a > 0$ is, dan is

$$\boxed{|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a}$$

Zo ook is $|x| < a$ equivalent met $-a < x < a$.

Gegeven
$x \in \mathbb{R}$; $a > 0$ (of $a \in \mathbb{R}_0^+$)

T.B.
$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

Bewijs
Is $x \geq 0$ dan is $|x| = x$ (zie definitie 1.2.1.)
Dus $|x| \leq a \quad \Leftrightarrow x \leq a$
$\Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ (want $x \geq 0$ en $-a < 0$)

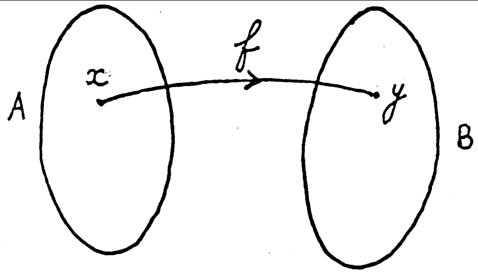
Is $x \leq 0$ dan is $|x| = -x$ (zie definitie 1.2.1.)
Dus $|x| \leq a \quad \Leftrightarrow -x \leq a$
$\Leftrightarrow x \geq -a$ (Kennen we deze eigenschap nog ? We vinden ze terug in 1.7.2 van Lespakket A1 van de cursus wiskunde basis - H.S.O.)
$\Leftrightarrow -a \leq x$
$\Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ want $x \leq 0$ en $0 < a$
In beide gevallen geldt dus
$|x| \leq a \quad \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ wordt op analoge manier bewezen.

1.3. Aanvullingen over functies

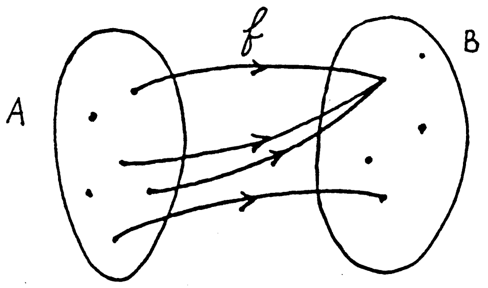
In Lespakket A5 van de cursus wiskunde basis - H.S.O. hebben we de lineaire functie bestudeerd. In Lespakket A8 vonden we het verloop van de kwadratische functie.
Weten we nog wat een functie is ? Wij hernemen de definitie.

1.3.1. Definities

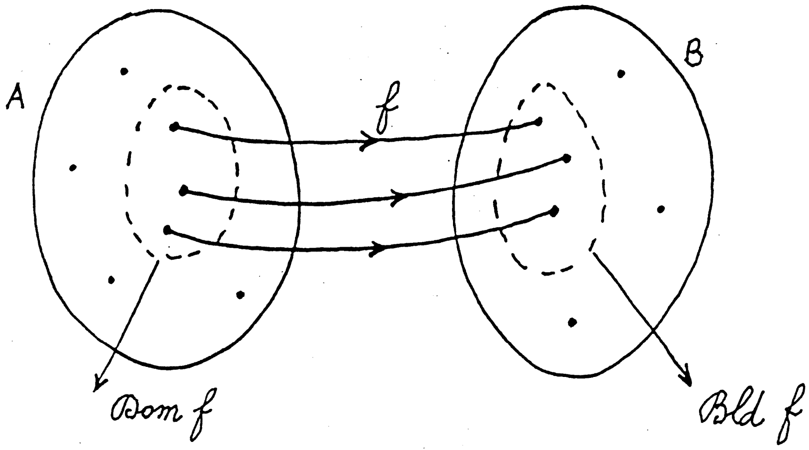
Een functie f is een relatie (verzameling koppels), waarbij voor elk object x ten hoogste één object y bestaat, zodat het koppel (x, y) tot de relatie behoort : (x, y) ∈ f.



Zoals we weten is er geen bezwaar als uit een element van A geen pijl vertrekt, evenmin als in een element van B meerdere pijlen toekomen.



Als en slechts als voor een object a een object b bestaat zodat (a, b) ∈ f, zeggen we dat *f gedefinieerd is in a* en noemen we *b het beeld van a door f.*
De functie f noteren we y = f(x) of f : x → y
Het beeld van a wordt genoteerd f(a) en wordt *functiewaarde* genoemd.
Als (a, b) ∈ f dan is dus b = f(a).
De verzameling van al de objecten waarvoor de functie f gedefinieerd is, heet het *domein* van f. Wij noteren dit *Dom f.*
Onder beeldverzameling of *beeldgebied* van een functie f verstaan wij het beeld van Dom f door f. Wij noteren deze verzameling *Bld f.*
Nemen we aan dat in de volgende figuur alle elementen van A en B en al de koppels die tot de functie behoren opgenomen werden, dan zijn de door de stippellijnen aangeduide deelverzamelingen het domein en het beeldgebied van f.



1.3.2. Functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ of reële functies

In hetgeen volgt zijn A en B gelijk aan $\mathbb{R}$, de verzameling van de reële getallen, ofwel gelijk aan *deelverzamelingen* van $\mathbb{R}$. Ook moet het *voorschrift* dat toelaat, na keuze van $a \in \mathbb{R}$, het tweede element van het koppel te bepalen, wiskundig kunnen geformuleerd worden.

Voorbeeld
de lineaire functie
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 2x - 3$
$f(x) = 2x - 3$ is hier het functievoorschrift.

Voor elke $a \in \mathbb{R}$ kunnen we de functiewaarde berekenen.
Zo is
$f(-2) = 2 \cdot (-2) - 3 = -7$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} - 3 = -2$$

$f(0) = 2 \cdot 0 - 3 = -3$

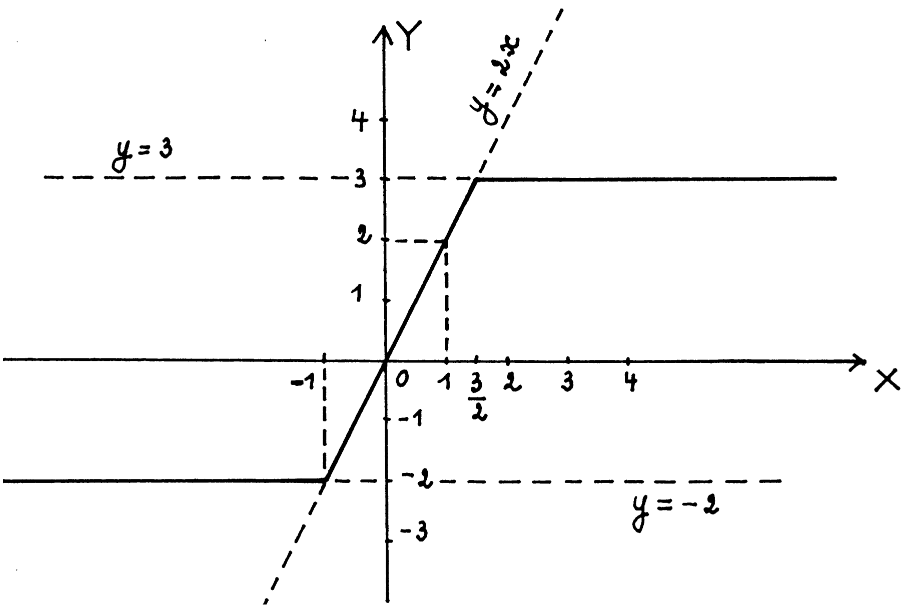
$f(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - 3$

Voor sommige functies bestaat het domein uit verschillende deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zodat in elke deelverzameling een ander voorschrift geldt. M.a.w. het voorschrift moet niet enig zijn zoals bij de lineaire functie.

Voorbeeld

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \begin{cases} x \to -2 & \text{als} \quad x \le -1 \\ x \to 2x & \text{als} \quad -1 < x \le \frac{3}{2} \\ x \to 3 & \text{als} \quad x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

Hoe vinden we de grafiek van f ?
We construeren in stippellijn de grafieken van drie functies f_1, f_2 en f_3 in eenzelfde assenkruis.



$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to -2$ (constante functie)

$\forall\, x \in \mathbb{R} : f_1(x) = -2 = y$

$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 2x$ (lineaire functie)

x	– 1	0	1
y = 2x	– 2	0	2

$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 3$ (constante functie)

$\forall\, x \in \mathbb{R} : f_3(x) = 3 = y$

Nu is $f(x) = -1$ als $x \le -1$, $f(x) = 2x$ als $-1 < x \le \frac{3}{2}$ en $f(x) = 3$ als $x > \frac{3}{2}$.

De grafiek in volle lijn is dus de grafiek van f.

A.C.O. 4

Schets de grafiek van de volgende functie in $\mathbb{R}$.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} :$ $\quad x \to -1 \quad$ als $\quad x < -4$

$$
\begin{array}{lll}
x \rightarrow x + 3 & \text{als} & -4 \leq x \leq 0 \\
x \rightarrow -3x + 3 & \text{als} & 0 < x \leq 1 \\
x \rightarrow x - 1 & \text{als} & 1 < x \leq 3 \\
x \rightarrow 2 & \text{als} & 3 < x
\end{array}
$$

1.3.3. Bepalen van domein en beeldgebied

Voor een functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x)$ waarbij in het functievoorschrift slechts elementaire bewerkingen (+ , – , x of · , : , $(\ )^n$, $\sqrt[n]{\ }$) voorkomen en Dom f niet kunstmatig beperkt is, dienen we voor *het bepalen van het domein* slechts te letten op twee onuitvoerbare bewerkingen :

1) *delen door nul*;
2) *evenmachtsworteltrekking uit een negatief getal.*

Illustreren we dit met enkele voorbeelden :

1.3.3.1.

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \dfrac{1}{x}$

$x \neq 0$ (Noemer mag niet nul worden). Dus Dom f = $\mathbb{R}_0$.

1.3.3.2.

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \sqrt{x}$

$\sqrt{x}$ is slechts gedefinieerd voor $x \geq 0$. Dus Dom f = $\mathbb{R}^+$

1.3.3.3.

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = f(x)$

f(x) is slechts gedefinieerd als $\dfrac{1-x}{1+x} \geq 0$

Deze ongelijkheid hebben we leren oplossen in Lespakket A5 van de cursus wiskunde basis - H.S.O.

Nulpunt : 1
Pool : – 1

x		– 1		1	
1 – x	+	+	+	0	–

$1 + x$	–	0	+	+	+
$\dfrac{1-x}{1+x}$	–	|	+	0	–

M.a.w., Dom f =]– 1; 1]

1.3.3.4.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$

Hierbij is $\sqrt{x}$ slechts gedefinieerd voor $x \geq 0$ (Zie 1.3.3.2.)
De noemer mag niet nul worden. We zoeken de nulpunt(en) van de noemer en sluiten ze uit :

$$\begin{aligned} & 1-\sqrt{x} = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & 1 = \sqrt{x} \\ \Leftrightarrow\quad & 1 = x \end{aligned}$$

Dus, Dom f $= [0, +\infty[\setminus \{1\}$
$= [0; 1[\;\cup\;]1; +\infty[$

Voor het bepalen van het beeldgebied Bld f dient doorgaans de functie bestudeerd te worden. In sommige gevallen kunnen we het beeldgebied nu al bepalen zoals blijkt uit het volgende voorbeeld :

1.3.3.5.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \dfrac{1}{1+x^2}$

De noemer $1 + x^2$ is steeds groter dan nul, dus, Dom f = $\mathbb{R}$.

Ook geldt : $\forall\, x \in \mathbb{R} : \dfrac{1}{1+x^2} > 0$

Evenzo $\forall\, x \in \mathbb{R} : 1 + x^2 \geq 1$

$\Leftrightarrow \quad \forall\, x \in \mathbb{R} : \dfrac{1}{1+x^2} \leq 1$

Samengevat : $\forall\, x \in \mathbb{R} : \quad 0 < \dfrac{1}{1+x^2} \leq 1$

Hieruit kunnen we afleiden dat Bld f =]0; 1]

A.C.O. 5

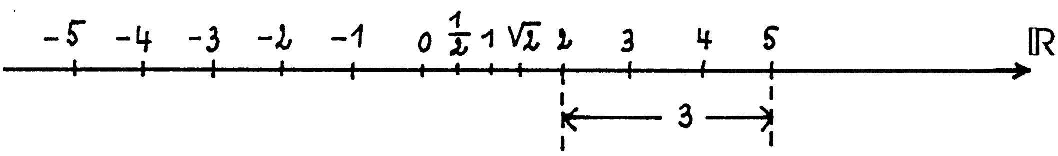
Vul de volgende tabel in

Functie f	Dom f	Bld f

$x \to \|x\|$		
$x \to \sqrt{x+1}$		
$x \to \sqrt{4-x^2}$		

1.4. Afstand in R. Metrische ruimte.

We tekenen enkele getallen op de getallenas :



De afstand tussen 2 en 5 is 3. We noteren dit d(2, 5) = 3.

1.4.1. Definitie

We definiëren de afstand in R :

$$\boxed{\forall\, a, b \in \mathbb{R} : d(a, b) = |a - b|}$$

Voorbeelden

$d(-3, -1) = |-3 - (-1)| = |-2| = 2$

$d(-4, 3) = |-4 - 3| = |-7| = 7$

A.C.O. 6

Bereken de volgende afstanden :

a) $d(-1, -3) =$

b) $d\left(\frac{1}{2}, 4\right) =$

c) $d\left(1, \sqrt{2}\right) =$

d) $d(-5, -2) =$

e) $d(-3, 0) =$

f) $d(2, 2) =$

g) $d(-1, 0) =$

Wat stellen we vast ?

$d(-1, -3) = d(-3, -1)$

$d(-1, -3) + d(-3, 0) \geq d(-1, 0)$

Dit formuleren we algemeen in de volgende stelling

.

1.4.2. Stelling

De afbeelding $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (a, b) \to d(a, b) = |a - b|$ heeft de volgende eigenschappen :

(1) $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$: $d(a, b) \geq 0$.

(2) $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$: $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$.

(3) $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$: $d(a, b) = d(b, a)$

(4) $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$: $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$.

Bewijs

(1) $d(a, b) = |a - b| \geq 0$ (Dit vonden we in 1.2.2.1.)

(2) $d(a, b) = 0$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow & |a - b| &= 0 \\ &\Leftrightarrow & a - b &= 0 \\ &\Leftrightarrow & a &= b \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} d(a, b) &= |a - b| \\ &= |b - a| \\ &= d(b, a) \end{aligned}$$

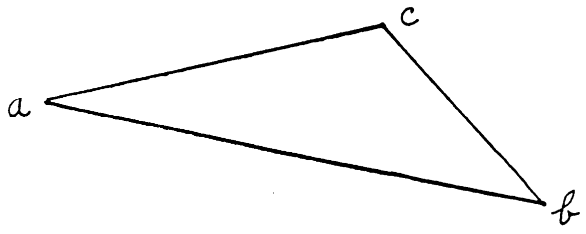
(4)
$$\begin{aligned} d(a, c) &= |a - c| \\ &= |a - b + b - c| \\ &= |(a - b) + (b - c)| \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $d(a, c) \leq |a - b| + |b - c|$ (Zie 1.2.2.2., absolute waarde van een som.)

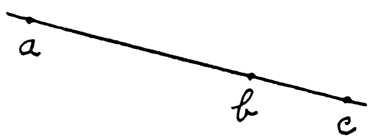
$\Leftrightarrow$ $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$

1.4.3. Opmerking

De vier eigenschappen van een afstand zijn intuïtief duidelijk voor de gewone afstand in het vlak : een afstand is positief, een afstand is slechts nul als de punten samenvallen, de afstand tussen twee punten a en b hangt niet af van de volgorde van die punten; ook voldoet een afstand aan de *driehoeksongelijkheid* : in een driehoek is een zijde kleiner dan de som van de twee andere zijden.



$d(a, c) < d(a, b) + d(b, c)$



$d(a, c) = d(a, b) + d(b, c)$

Liggen de drie punten op eenzelfde rechte dan is d(a, c) = d(a, b) + d(b, c) als b tussen a en c ligt.

1.4.4. Metrische ruimte

Een verzameling waarin een afstand d gedefinieerd is, wordt samen met die afstand, een *metrische ruimte* genoemd.
Zo is $\mathbb{R}$, d een metrische ruimte.
De elementen van een metrische ruimte worden *punten* genoemd (de elementen van $\mathbb{R}$ zijn nochtans getallen).

1.5. Omgevingen in $\mathbb{R}$

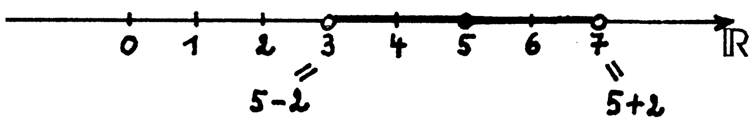
In 1.4. hebben we het begrip afstand ingevoerd. Als we het woord afstand gebruiken denken we onmiddellijk ook aan "ver" of "dicht" bij elkaar. Als we dicht bij plaats A wonen, dan wonen we "in de omgeving van A". Het begrip *omgeving* is één van de begrippen uit de topologie, een belangrijk onderdeel van de wiskunde. Verschillende begrippen ervan zijn veralgemeningen van eigenschappen van verzamelingen reële getallen. Dit is de reden waarom we in de vorige paragrafen de reële getallen nogmaals bestudeerden.

1.5.1. ε-omgeving van a ∈ $\mathbb{R}$

Voor een gegeven getal a ∈ $\mathbb{R}$ en een gegeven strikt positief reëel getal ε is een ε-*omgeving van a* het open interval

$$]a - \varepsilon;\ a + \varepsilon[$$

Zo is een 2-omgeving van 5 gelijk aan]5 – 2; 5 + 2[=]3; 7[. Dit is dus een *open interval* met lengte 2 · 2 = 4 en *midden* 5.
Op een getallenas komt die 2-omgeving van 5 overeen met een open lijnstuk met midden 5 :



In de analyse worden vooral de Griekse letters ε (epsilon) en δ (delta) gebruikt. Zij stellen altijd *strikt positieve reële* getallen voor, die willekeurig groot, maar ook *willekeurig klein* kunnen zijn.

Zo is]4,99; 5,01[=]5 – 0,01; 5 + 0,01[een $\frac{1}{100}$-omgeving van 5.

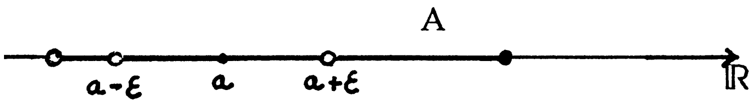
A.C.O. 7

Vul de ontbrekende getallen in :
a)]1; 7[is een 3-omgeving van ... .

b)]– 2; 6[is een ...-omgeving van 2 .
c)]3; 9[is een ...-omgeving van ... .

1.5.2. Omgeving van a ∈ R

In een ε-omgeving van a is a het midden van het interval]a – ε; a + ε[.
Verzwakken we deze voorwaarden :
Een deelverzameling A van R is een *omgeving* van a ∈ A ⊂ R als er een ε-omgeving]a – ε; a + ε[bestaat, die een deelverzameling van A is.
Dus, is a ∈]a – ε; a + ε[⊂ A, dan is A een omgeving van a ∈ R.



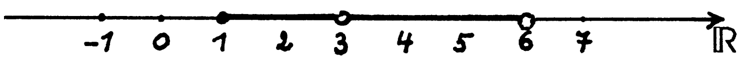
Voorbeelden
[1; 6[is een omgeving van 3 :
3 ∈]3 – 1; 3 + 1[=]2; 4[⊂ [1; 6[
]– ∞; 5] is een omgeving van 4 :
4 ∈]4 – 1; 4 + 1[=]3; 5[⊂]– ∞; 5]

1.5.3. Gereduceerde omgeving van a

Is A een omgeving van a, dan noemen we A \ {a} een *gereduceerde* omgeving van a. Uit de omgeving A van a hebben we het element a weggelaten.

Voorbeeld
[1; 3[∪]3; 6[is een gereduceerde omgeving van 3 :
[1; 3[∪]3; 6[= [1; 6[\ {3} en [1; 6[is een omgeving van 3.(Zie 1.5.2.)

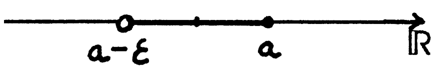
Op een getallenas :

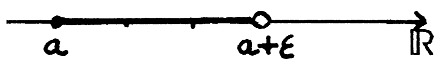


1.5.4. Linker omgeving, rechter omgeving van a ∈ R.

Voor elke ε ∈ R_0^+ noemen we]a – ε; a] een *linker omgeving* van a. Analoog wordt [a; a + ε[een *rechter omgeving* van a genoemd.

Op een getallenas :





(Linker omgeving van a) (Rechter omgeving van a)

Voorbeelden
]– 1; 3] is een linker omgeving van 3.
[3; 5[is een rechter omgeving van 3.
Een linker of rechter omgeving van a kunnen we *reduceren* door het element a uit die verzameling weg te laten.
Zo is]3; 5] een gereduceerde rechter omgeving van 3.

A.C.O. 8

Vul in :
ε-omgeving, omgeving, gereduceerde omgeving, linker of rechter omgeving. Geef ook de waarde voor ε.
a)]1; 8] is een .... van 4.
b)]– 100; 2] is een .... van 2.
c)]5; 9[is een .... van 7.
d)]5; 9[is een .... van 5.
e)]1; 8] is een .... van 8.
f) $\mathbb{R}_0$ is een .... van 0.

1.6. De verzameling $\overline{\mathbb{R}}$

1.6.1. De symbolen – ∞ en + ∞

In hetgeen voorafging en ook in de cursus wiskunde basis - H.S.O., hebben we regelmatig de symbolen – ∞ en + ∞ gebruikt, dit zonder ze nader te omschrijven.
In 1.3.3.4. vonden we dat Dom f = [0; 1[∪]1; + ∞[.
Voor een functie f die overal gedefinieerd is, schrijven we

Dom f = $\mathbb{R}$ of Dom f =]– ∞; + ∞[.

Bekijken we de open intervallen]1; 4[en]– ∞; + ∞[:
in]1; 4[is geen kleinste of grootste element, maar de grenzen 1 en 4 die noch genomen, noch overschreden mogen worden, zijn scherp afgelijnd en zijn ook reële getallen (punten).
$\mathbb{R}$ =]– ∞; + ∞[is een geordende verzameling die geen kleinste of grootste element heeft. In $\mathbb{R}$ krijgen we de indruk dat de reële getallen r < s < t tussen grenzen kunnen gezet worden :

$$-\infty < \ldots < r < s < t < \ldots < +\infty$$

Die grenzen bestaan niet in $\mathbb{R}$. Aan de verzameling van de *reële getallen* gaan we twee nieuwe *elementen* toevoegen (*die geen reële getallen zijn*) en we noteren ze – ∞ en + ∞.
De orde in $\mathbb{R}$, geïllustreerd door enkele willekeurig gekozen reële getallen

$$-10^6 < -10^4 < -1993 < -\frac{1}{3} < 0 < 1 < \sqrt{2} < 10^6$$

wordt uitgebreid tot

$$-\infty < -10^6 < -10^4 < -1993 < -\frac{1}{3} < 0 < 1 < \sqrt{2} < 10^6 < +\infty$$

Dit betekent dat we

a. het element of object $+\infty$ (plus oneindig), dat geen reëel getal is, groter verklaren dan elk reëel getal;
b. het element of object $-\infty$ (min oneindig) kleiner verklaren dan elk reëel getal.

1.6.2. De totaal geordende verzameling $\overline{\mathbb{R}}, \leq$

De verzameling $\mathbb{R}$ wordt door het toevoegen van twee nieuwe elementen $-\infty$ en $+\infty$ tot een nieuwe verzameling $\overline{\mathbb{R}}$ (lees : $\mathbb{R}$ overstreept) uitgebreid :

$$\boxed{\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}}$$

De totale orde in $\mathbb{R}, \leq$ (zie 1.2.) wordt uitgebreid tot een totale orde in $\overline{\mathbb{R}}$ door de bijkomende afspraak :

$$\forall\, r \in \mathbb{R} : -\infty < r < +\infty$$

De elementen $-\infty$ en $+\infty$ zijn geen reële getallen. De rekenregels van $\mathbb{R}$ zijn dan ook niet toepasselijk op $-\infty$ en $+\infty$.

1.6.3. Rekenregels in $\overline{\mathbb{R}}$

Voor $+\infty$ en $-\infty$ zijn er aparte rekenregels gedefinieerd :

1.6.3.1. Optelling

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \quad \begin{aligned} &x + (+\infty) = +\infty + x = +\infty \\ &x + (-\infty) = -\infty + x = -\infty \\ &(+\infty) + (+\infty) = +\infty \\ &(-\infty) + (-\infty) = -\infty \end{aligned}$$

1.6.3.2. Vermenigvuldiging (Tekenregel)

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_0^+ : \quad \begin{aligned} &x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = +\infty \\ &x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty \end{aligned}$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_0^- : \quad \begin{aligned} &x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = -\infty \\ &x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = +\infty \end{aligned}$$

$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$

$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$

$(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$

Voorbeelden

$-7 \cdot (+\infty) = -\infty$

$\dfrac{+\infty}{2} = \dfrac{1}{2}(+\infty) = +\infty$

$-3 + (+\infty) = +\infty$

Merken we op dat

$(+\infty) + (-\infty),\ 0 \cdot (+\infty),\ 0 \cdot (-\infty),\ \dfrac{+\infty}{+\infty}, \dfrac{+\infty}{-\infty}, \dfrac{-\infty}{+\infty}, \dfrac{-\infty}{-\infty}$

niet vermeld worden : het zijn *onbepaalde vormen* die we in de volgende lespakketten behandelen.

A.C.O. 9

Bereken in $\overline{\mathbb{R}}$:

a) $(-2) \cdot (-\infty)$

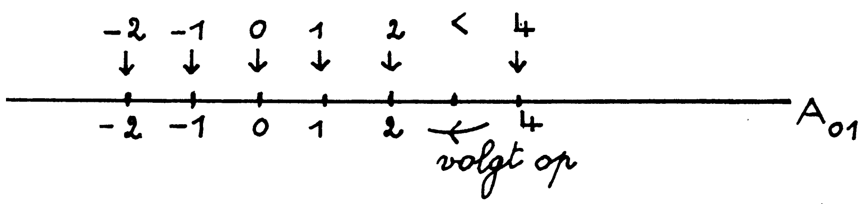
b) $+\infty + (-5)^{101}$

c) $(-\infty)^2$

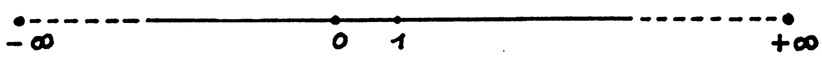
d) $\dfrac{+\infty}{-4}$

1.6.4. De voltooide rechte

De reële getallen kunnen bijectief getrokken worden op de punten van een gegradueerde rechte (behoud van de orde).



De reële getallen worden *eindige punten*. $-\infty$ en $+\infty$ zijn de *oneindige punten*. Daar het onmogelijk is deze laatste twee af te beelden nemen we onze toevlucht tot volgende voorstelling :



De rechte is als het ware voltooid door twee eindpunten en er is overeenstemming tussen de gezegden

"$+\infty$ is groter dan elk reëel getal"

"het punt $+\infty$ volgt op (of ligt rechts van) de eindige punten".

$\overline{\mathbb{R}}$ noemen we de *voltooide rechte*.

1.6.5. Omgevingen van + ∞ en van – ∞

1.6.5.1. Intervallen van $\overline{\mathbb{R}}$

De intervallen met grenspunten a en b (a < b) worden op dezelfde wijze gedefinieerd als in $\mathbb{R}$.

$[a; b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \leq x \leq b\}$ gesloten interval.

$]a; b[= \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x < b\}$ open interval.

$[a; b[= \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \leq x < b\}$ half-open interval.

Voorbeelden

$[0; +\infty] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid 0 \leq x \leq +\infty\} = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$

$]-\infty; 0[= \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid -\infty < x < 0\} = \mathbb{R}_0^-$

A.C.O. 10

Welke van de volgende verzamelingen $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}_0$, $\overline{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ zijn intervallen van $\overline{\mathbb{R}}$?

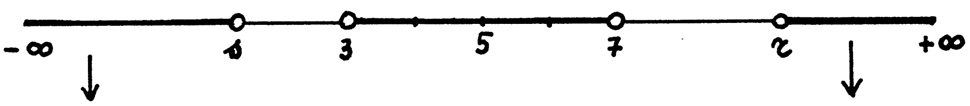
1.6.5.2. Omgevingen van + ∞ en – ∞

Herinneren we ons dat]3; 7[een 2-omgeving van 5 is ? (Kijken we in het andere geval 1.5.1. nog even na !)

Een omgeving van een eindig punt (reëel getal) strekt zich links en rechts van dit punt uit.

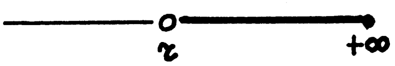
Voor + ∞ en – ∞ is dit onmogelijk, want + ∞ en – ∞ zijn eindpunten van de voltooide rechte.

Nu gaat het zo :



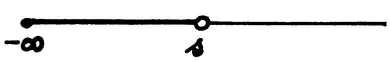
Omgeving van – ∞ Omgeving van + ∞

Een omgeving van + ∞ is een half-open interval dat + ∞ bevat



$]r; +\infty]$

Een omgeving van – ∞ :



$[-\infty; s[$

Een omgeving van $+\infty$ strekt zich "links" van dit punt uit (en is dus in feite een linker omgeving).
Een interval $]r; +\infty[$ met $r \in \mathbb{R}$ en dus $]r; +\infty[\subset \mathbb{R}$, wordt een *gereduceerde omgeving* van $+\infty$ genoemd.
Zo is $]-\infty; s[$ met $s \in \mathbb{R}$ en dus $]-\infty; s[\subset \mathbb{R}$ een *gereduceerde omgeving* van $-\infty$.

Voorbeelden en tegenvoorbeelden
$]20; +\infty]$ is een omgeving van $+\infty$
$[1; 5] \cup \{+\infty\}$ is geen omgeving van $+\infty$:
$\forall r \in \mathbb{R} :]r; +\infty] \not\subset [1; 5] \cup \{+\infty\}$

A.C.O. 11

a) Is $\mathbb{Z}$ een omgeving van $+\infty$?
b) Is $]-\infty; 2]$ een omgeving van $-\infty$?
c) Is $\mathbb{R} \setminus]-\infty; 1]$ een omgeving van $+\infty$?
Verklaar de gegeven antwoorden.

OPLOSSINGEN A.C.O.

1.

x	2,1	– 3	3,4	– 8	$-\sqrt{3}$
y	– 4	– 5	6,6	2	$\frac{3}{7}$
|x|	2,1	3	3,4	8	$\sqrt{3}$
– x	– 2,1	3	– 3,4	8	$\sqrt{3}$
|– x|	2,1	3	3,4	8	$\sqrt{3}$
– |x|	– 2,1	– 3	– 3,4	– 8	$-\sqrt{3}$
|y|	4	5	6,6	2	$\frac{3}{7}$
|– y|	4	5	6,6	2	$\frac{3}{7}$
– |y|	– 4	– 5	– 6,6	– 2	$-\frac{3}{7}$

2.

x	2,1	– 3	3,4	– 8
y	– 4	– 5	6,6	2
|x|	2,1	3	3,4	8
|y|	4	5	6,6	2
– |y|	– 4	– 5	– 6,6	– 2
x + y	– 1,9	– 8	10	– 6
|x + y|	1,9	8	10	6
x – y	6,1	2	– 3,2	– 10
|x – y|	6,1	2	3,2	10
|x| + |y|	6,1	8	10	10

3.

x	2,1	– 3	3,4	– 8	
y	– 4	– 5	6,6	2	
$\|x\|$	2,1	3	3,4	8	
$\|y\|$	4	5	6,6	2	
$x \cdot y$	– 8,4	15	22,44	– 16	
$\|x \cdot y\|$	8,4	15	22,44	16	
$\|x\| \cdot \|y\|$	8,4	15	22,44	16	
$\frac{x}{y}$	– 0,525	0,6	$\frac{17}{33}$	– 4	(1)
$\left\|\frac{x}{y}\right\|$	0,525	0,6	$\frac{17}{33}$	4	
$\frac{\|x\|}{\|y\|}$	$\frac{2,1}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{17}{33}$	$\frac{8}{2} = 4$	(2)

In (1) is $2{,}1 : (-4) = -\frac{21}{40} = -0{,}525$

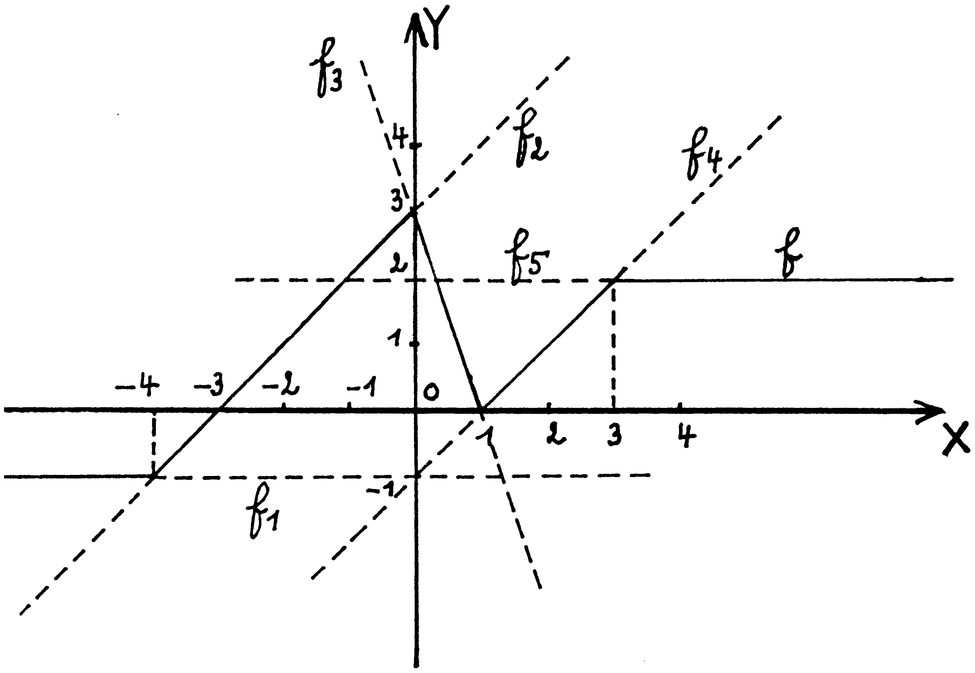
$\frac{-3}{-5} = \frac{6}{10} = 0{,}6$

$3{,}4 : 6{,}6 = \frac{34}{66} = \frac{17}{33}$

In (2) is $\frac{2{,}1}{4} = \frac{21}{40} = 0{,}525$

$\frac{3}{5} = 0{,}6$

4. Grafiek van de functie f :



(De grafiek van f tekenen we in volle lijn.)

We berekenen de coördinaat van enkele punten zodat we de grafiek van f kunnen tekenen.

$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to -1$

x	− 4	0
− 1	− 1	− 1

$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x + 3$

x	− 4	0
x + 3	− 1	3

$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to -3x + 3$

x	0	1
− 3x + 3	3	0

$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x - 1$

x	1	3
x − 1	0	2

$f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 2$

x	3	4
2	2	2

5.

Functie f	Dom f	Bld f
$x \to \lvert x\rvert$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$
$x \to \sqrt{x+1}$	$[-1; +\infty[$	$\mathbb{R}^+$
$x \to \sqrt{4-x^2}$	$[-2; 2]$	$[0; 2]$

Hoe hebben we Dom f, Bld f gevonden ?

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to |x|$

In 1.2.1. hebben we |x| gedefinieerd voor elk reëel getal x.

Dus, Dom f = $\mathbb{R}$. In 1.2.2.1. vinden we dat Bld f = $\mathbb{R}^+ : \forall x \in \mathbb{R} : |x| \geq 0$.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \sqrt{x+1} = f(x)$

f(x) is slechts gedefinieerd als $x + 1 \geq 0$

Dus, Dom f = $[-1, +\infty[$

Uit $x + 1 \geq 0$ volgt $\sqrt{x+1} \geq 0$,

m.a.w. Bld f = $\mathbb{R}^+$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \sqrt{4-x^2} = f(x)$

f(x) is gedefinieerd als $4 - x^2 \geq 0$

x		-2		2	
$4-x^2$	$-$	0	+	0	$-$

Dus, Dom f = $[-2; 2]$

Ook is in Dom f $0 \leq 4 - x^2 \leq 4$ (want $x^2 \geq 0$)

Dus $0 \leq \sqrt{4-x^2} \leq 2$

Of Bld f = $[0; 2]$

6. a) $d(-1, -3) = |-1-(-3)| = 2$
   b) $d(\frac{1}{2}, 4) = \left|\frac{1}{2} - 4\right| = \left|-\frac{7}{2}\right| = \frac{7}{2}$
   c) $d(1, \sqrt{2}) = \left|1-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}-1$ (want $\sqrt{2} > 1$).
   d) $d(-5, -2) = |-5-(-2)| = 3$
   e) $d(-3, 0) = |-3-0| = 3$
   f) $d(2, 2) = |2-2| = 0$
   g) $d(-1, 0) = |-1-0| = 1$

7. a) $]1; 7[=]4-3; 4+3[$ is een 3-omgeving van 4.
   b) $]-2; 6[=]2-4; 2+4[$ is een 4-omgeving van 2.
   c) $]3; 9[=]6-3; 6+3[$ is een 3-omgeving van 6.
8. a) omgeving van 4.

b) linker omgeving van 2.
c) 2-omgeving van 7.
d) gereduceerde rechter omgeving van 5 : $[5; 5 + 4[= [5; 9[$ is een rechter omgeving van 5.
e) linker omgeving van 8 : $]1; 8] =]8 – 7; 8]$.
f) gereduceerde omgeving van 0 : $\mathbb{R}$ is een omgeving van 0 , want $0 \in\ ]0 – 1; 0 + 1[\subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

9. a) $+ \infty$
b) $+ \infty$
c) $(-\infty)^2 = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$
d) $\dfrac{+\infty}{-4} = -\infty$.

10. $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$; interval.
$\mathbb{R}_0 =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$; geen interval (wel een unie van twee intervallen).
$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty; +\infty]$; interval.
$\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$; interval.
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$; geen interval.
$\mathbb{R} \cup \{+\infty\} =]-\infty; +\infty]$; interval.

11. a) $\mathbb{Z} = \{ ..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ is geen omgeving van $+\infty$: we kunnen $\mathbb{Z}$ niet schrijven als $]r; +\infty]$ met $r \in \mathbb{R}$.
b) $]-\infty; 2]$ is geen omgeving van $-\infty$ omdat $-\infty \notin\ ]-\infty; 2]$.
Het is wel een gereduceerde omgeving van $-\infty$.
c) $\mathbb{R} \setminus]-\infty; 1] =]1; +\infty[$ is van de vorm $]r; +\infty[$ maar bevat $+\infty$ niet en is dus geen omgeving van $+\infty$. Het is een gereduceerde omgeving van $+\infty$.

Te onthouden

$|x| = x$ als $x \geq 0$
$|x| = -x$ als $x \leq 0$

$\forall\, x \in \mathbb{R}: \quad |x| \geq 0$
$\forall\, x \in \mathbb{R}: \quad |-x| = |x|$
$\forall\, x \in \mathbb{R}: \quad -|x| \leq x \leq |x|$
$\forall\, x, y \in \mathbb{R}: \quad |x + y| \leq |x| + |y|$
$\forall\, x, y \in \mathbb{R}: \quad |x - y| \leq |x| + |y|$
$\forall\, x, y \in \mathbb{R}: \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
$\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}_0: \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to f(x) = y$
Dom $f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ is gedefinieerd}\}$
Bld $f = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists\, x \in \mathbb{R} : f(x) = y\}$

Afstand d in $\mathbb{R}$: $\forall\, a, b \in \mathbb{R} : d(a, b) = |a - b|$

Omgevingen in $\mathbb{R}$:
ε-omgeving van a : $]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$
A is omgeving van a $\Leftrightarrow \exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+ : a \in\ ]a - \varepsilon; a + \varepsilon[\ \subset A$
Gereduceerde omgeving van a : $A \setminus \{a\}$ met A een omgeving van a.
Linker omgeving van a : $]a - \varepsilon; a]$ $\quad (\varepsilon \in \mathbb{R}_0^+)$
Rechter omgeving van a : $[a; a + \varepsilon[$

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$
Omgeving van $+\infty$: $]r; +\infty]$ $(r \in \mathbb{R})$
Omgeving van $-\infty$: $[-\infty; s[$ $(s \in \mathbb{R})$

VERWIJZING NAAR DE TAAK

Hebben we de definities en eigenschappen uit dit hoofdstuk goed ingestudeerd, o.a., door de A.C.O. uit dit hoofdstuk goed op te lossen, dan zijn we klaar om de opgaven 1, 2, 3, 4 en 5 van de taak correct te beantwoorden.

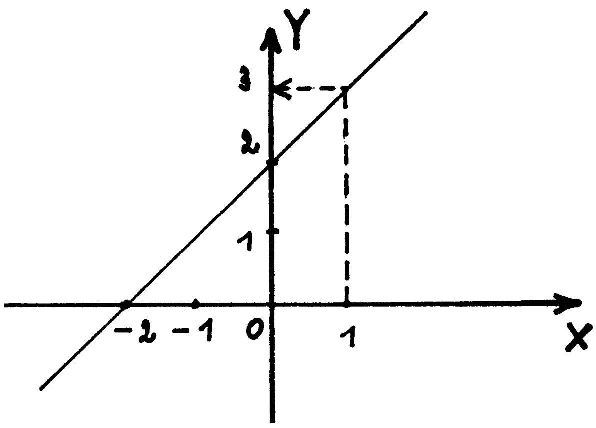
Hoofdstuk 2
Continuïteit van een functie in a ∈ R

2.1. Definitie van continuïteit

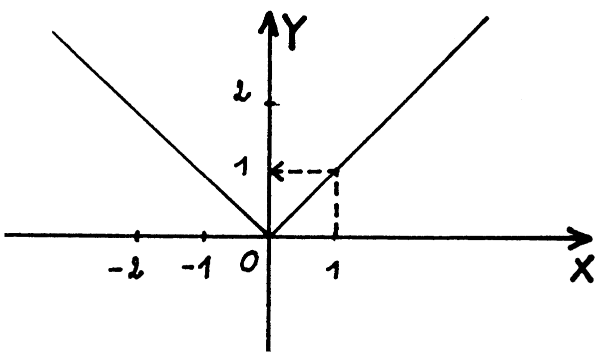
2.1.1. Grafische definitie

We construeren de grafiek van enkele functies :

$f_1 : \mathrm{R} \to \mathrm{R} : x \to x + 2$

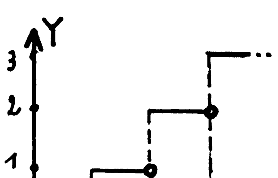


$f_2 : \mathrm{R} \to \mathrm{R} : x \to |x|$



$f_3 : \mathrm{R} \to \mathrm{R} :$ $x \to G(x)$
met G(x) het grootste geheel getal kleiner dan of gelijk aan x

Dus $G(0) = 0$; $G(1) = 1$; $G(0,5) = 0$
$G(1,6) = 1$; $G(-0,5) = -1$; $G(-1,7) = -2$



De bolletjes tellen dus niet mee :
G(2) = 2; G(2) ≠ 1.

Wat stellen we vast ?
De functies f_1 en f_2 hebben de eigenschap : de grafiek kan in *één trek getekend* worden. Of dit nu vloeiend gebeurt (f_1) of als de grafiek, zoals voor f_2, in de oorsprong een knik vertoont, laten we in het midden. Dergelijke functies heten *continu*. De functie f_3 verandert *sprongsgewijze* om dan telkens te stagneren. In elk der punten met abscis ..., – 2, – 1, 0, 1, 2, ..., kortom in $\mathbb{Z}$, vertoont de grafiek een sprong. In die punten heet de functie *discontinu*.
M.a.w. we zeggen dat een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continu is in* $a \in \mathbb{R}$ als en slechts als

1) $a \in$ Dom f. Op de grafiek van f bestaat dan een punt (a, f(a)).
2) de grafiek van f in dit punt geen sprong vertoont.

Zo zijn de functies f_1 en f_2 continu in 1. f_3 is discontinu in 1.

A.C.O. 1

In welke punten is de volgende functie f discontinu ?

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \begin{cases} x \to 1 & \text{als} \quad x \leq -2 \\ x \to |x| + 3 & \text{als} \quad -2 < x \leq 0 \\ x \to |x| & \text{als} \quad 0 < x \leq 1 \\ x \to -2x + 3 & \text{als} \quad 1 < x \end{cases}$$

Deze *grafische definitie* van continuïteit is slechts bruikbaar als we de grafiek van f kennen. Nagenoeg machteloos staan wij tegenover volgende functies die zeker niet vergezocht zijn :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^3 - 7x + 6$ (functie van de derde graad)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \dfrac{2x - 1}{x + 2}$ (een gebroken functie)

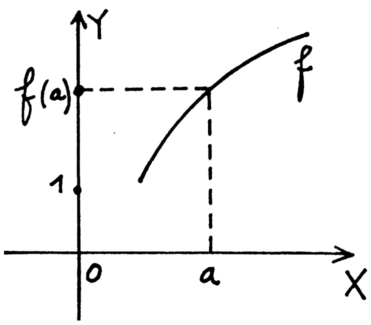
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \sin 2x$ (een goniometrische functie).

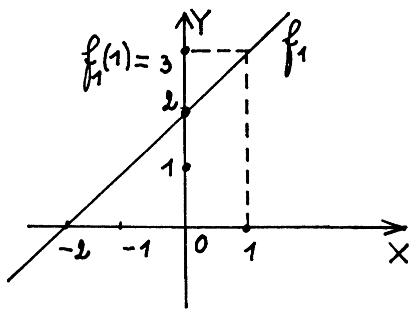
2.1.2. Omgevingsdefinitie

Is f continu in a ? Is f discontinu in a ? We zoeken een houvast, een omschrijving van die begrippen die absolute waarborgen biedt.
De grafiek is een hulpmiddel, maar de definitie zelf zal hiervan los staan.

2.1.2.1.

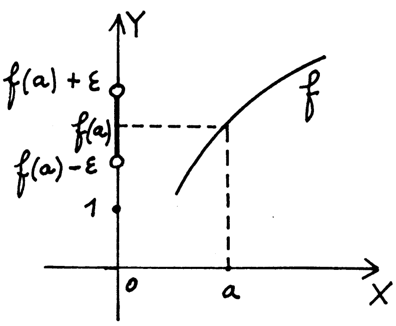
Beschouw de functie f en het punt a ∈ Dom f met functiewaarde f(a).
Rechts tekenen we de grafiek van f_1 uit 2.1.1. met a = 1 ∈ Dom f_1

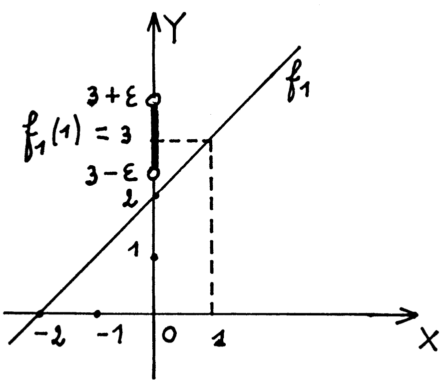




2.1.2.2.

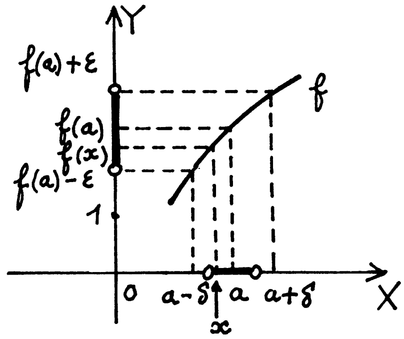
Neem op de Y-as een *willekeurige* ε-omgeving (algemener : omgeving) van f(a)

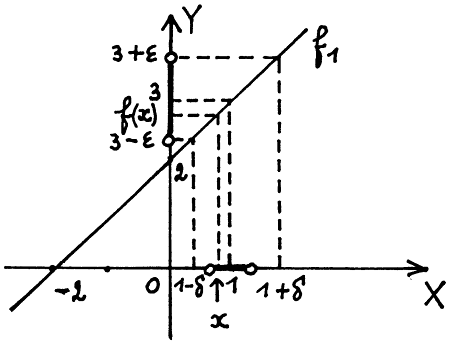




2.1.2.3

Onderzoeken we nu of op de X-as een omgeving (δ-omgeving; δ speelt de rol van ε) van a bestaat,]a – δ; a + δ[, zodat het beeld f(x) van elke x ∈ Dom f ∩]a – δ; a + δ[tot de gekozen ε-omgeving behoort.





2.1.2.4. *Definitie*

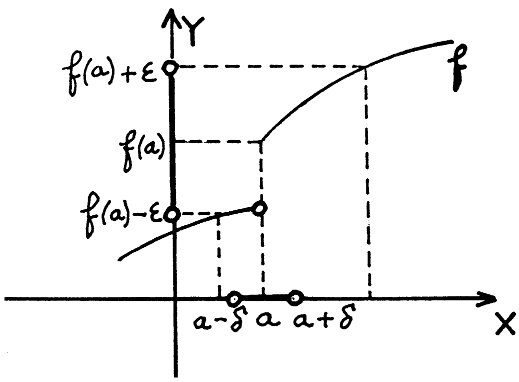
Een functie f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is continu in een punt a ∈ Dom f als en slechts als er voor *elke* omgeving B van f(a) een omgeving A van a *bestaat* zodat elke x in A afgebeeld wordt in B.

Opmerkingen

a. Een functie kan slechts continu zijn in een punt van haar domein.
b. We leggen de nadruk op :
   Elke omgeving B van f(a); ze mag willekeurig klein gekozen worden.
   Voor een gekozen omgeving van f(a) moet er een omgeving A van a *bestaan*; A mag ook willekeurig klein zijn.
c. Praktisch werken we met ε-omgevingen :
   ε-omgeving van f(a) : $]f(a) - \varepsilon; f(a) + \varepsilon[$
   δ-omgeving van a : $]a - \delta; a + \delta[$

A.C.O. 2

Is in bijgaande figuur de continuïteit van f in a gewaarborgd ?

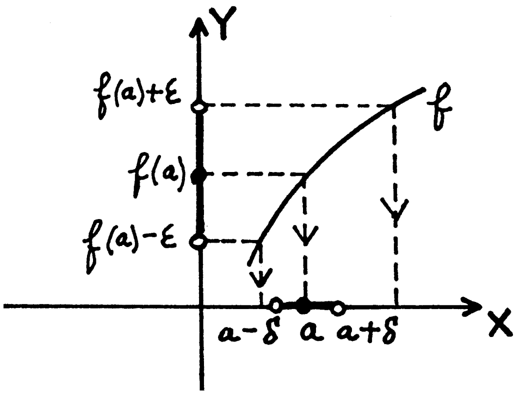


A.C.O. 3

Illustreer grafisch de discontinuïteit van $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to G(x)$ in het punt 2.

2.2. Continuïteit : ε-δ-vorm van de definitie

In een opmerking bij 2.1.2.4. wijzen we al op de praktische werkwijze met ε-omgevingen.



Kiezen we een ε-omgeving van f(a) : $]f(a) - \varepsilon; f(a) + \varepsilon[$.
Voor een gegeven functie f en $a \in \text{Dom } f$ is die omgeving volledig bepaald door $\varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$.
De zin der pijltjes volgend stellen we vast dat met dit interval, op de X-as een interval overeenstemt waarin we een δ-omgeving $]a - \delta; a + \delta[$, $\delta \in \mathbb{R}_0^+$, kunnen construeren. (Het volstaat o.m. voor δ het maatgetal van het kleinste der twee stukken, links of rechts van a, te nemen).
Elk reëel getal $x \in \,]a - \delta; a + \delta[\cap \text{Dom } f$ wordt door f afgebeeld in $f(x) \in \,]f(a) - \varepsilon; f(a) + \varepsilon[$ als f continu is in a.

Nu is $x \in \,]a - \delta; a + \delta[$

$$\begin{array}{llll}
\Leftrightarrow & a - \delta < x < a + \delta & & \\
\Leftrightarrow & a - \delta - a < x - a < a + \delta - a & & (\mathbb{R}, + \cdot \leq \text{ is een geordend veld.} \\
\Leftrightarrow & -\delta < x - a < \delta & & \text{Zie 1.2.)} \\
\Leftrightarrow & |x - a| < \delta & & \text{(Zie 1.2.2.4.)}
\end{array}$$

Zo ook : $f(x) \in \,]f(a) - \varepsilon; f(a) + \varepsilon[$

$$\begin{array}{lll}
\Leftrightarrow & f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon & \\
\Leftrightarrow & f(a) - \varepsilon - f(a) < f(x) - f(a) < f(a) + \varepsilon - f(a) & \text{(Zie 1.2.)} \\
\Leftrightarrow & -\varepsilon < f(x) - f(a) < \varepsilon & \\
\Leftrightarrow & |f(x) - f(a)| < \varepsilon &
\end{array}$$

Voor “elke ε-omgeving van f(a)” kunnen we kort formuleren $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$
($\forall\, \varepsilon \in$ ... : voor alle ε ...)
“Er bestaat een δ-omgeving van a” formuleren we kort : $\exists\, \delta \in \mathbb{R}_0^+$
($\exists\, \delta \in$ ... : er bestaat een δ ...)
Zo bekomen we de formulering van de *ε-δ-definitie van continuïteit* :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to f(x)$ is continu in $a \in \text{Dom } f$ als en slechts als $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+ : \exists\, \delta \in \mathbb{R}_0^+ : \lvert x - a\rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - f(a)\rvert < \varepsilon$

Voorbeeld
De lineaire functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 4x - 3$ is continu in 2.
We zoeken een δ voor ε = 0,001 :
$f(2) = 4 \cdot 2 - 3 = 5$
Er moet voldaan worden aan

	$\lvert f(x) - f(2)\rvert$	$< \varepsilon$
of	$\lvert 4x - 3 - 5\rvert$	$< 0{,}001$
$\Leftrightarrow$	$\lvert 4x - 8\rvert$	$< 0{,}001$
$\Leftrightarrow$	$4\lvert x - 2\rvert$	$< 0{,}001$ (Zie 1.2.2.3.)
$\Leftrightarrow$	$\lvert x - 2\rvert$	$< 0{,}00025 = \delta$

De van ε afhankelijke δ is via rekenwerk bepaald.
Zo kunnen we voor elke $\varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$ een $\delta \in \mathbb{R}_0^+$ vinden. (Zie A.C.O. 4)
M.a.w. f is continu in 2.

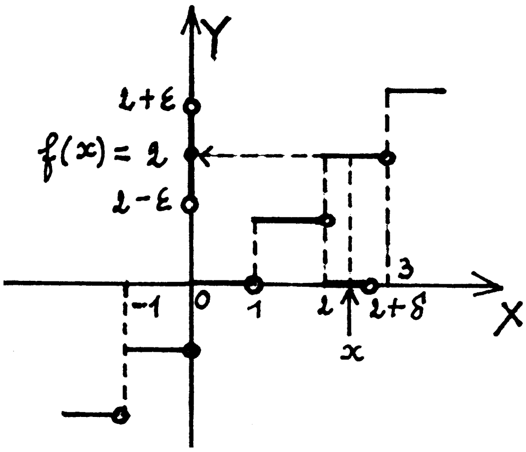
A.C.O. 4

Gegeven
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 4x - 3$; $2 \in \mathbb{R}$.

Bewijs dat voor elke $\varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$, $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4}$. M.a.w. f is continu in 2.

2.3. Links of rechts continu in een punt

In 2.1. vonden we dat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to G(x)$ niet continu is in 2.



De elementen links van 2 worden niet afgebeeld in de gekozen ε-omgeving
$]2 - \varepsilon; 2 + \varepsilon[$ van $f(2) = 2$.
Wel geldt dat $x \in [2; 2 + \delta[$ (*rechter* omgeving van 2)
afgebeeld wordt in $f(x) = 2 \in]2 - \varepsilon; 2 + \varepsilon[$.
We zeggen dan ook dat f *rechts continu* is in 2.

Definities (ε-δ-vorm)

f is *links continu* in $a \in$ Dom f
als en slechts als
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+ : \exists \delta \in \mathbb{R}_0^+ : a - \delta < x \leq a \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

f is *rechts continu* in $a \in$ Dom f
als en slechts als
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+ : \exists \delta \in \mathbb{R}_0^+ : a \leq x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

2.4. Continuïteit in een interval

2.4.1. Continuïteit in een open *interval. Definitie.*

Zij $]a; b[\subset$ Dom f.
De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to f(x)$ is continu in een open interval $]a; b[$ als f continu is in elk punt van dit interval.

2.4.2. Continuïteit in een gesloten interval. Definitie.

Een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to f(x)$ is continu in een gesloten interval $[a; b] \subset \text{Dom } f$ als
a. f continu is in elk punt van $]a; b[$
b. f rechts continu is in a
c. f links continu is in b.

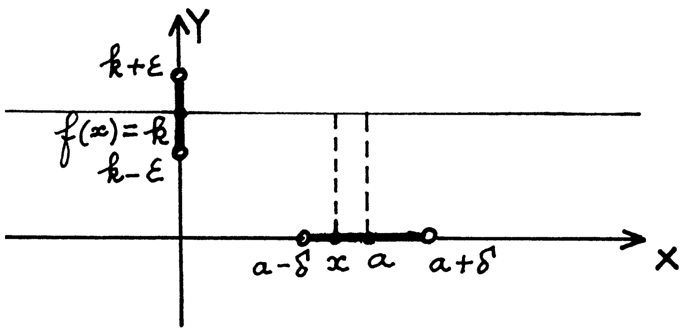
2.4.3.

Is f continu in $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$ dan wordt f een *continue functie* genoemd.

Voorbeelden
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to G(x)$ is continu in $]1; 2[$ (Zie 2.1.1.)
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x + 2$ is een continue functie (Zie 2.1.1.)
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to G(x)$ is continu in $[1; 2[$, in $[2; 3[$ (Zie 2.1.1., 2.3.)

2.5. De constante functie is continu

Gegeven
De constante functie :
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to k$ $(k \in \mathbb{R})$
Dom f = $\mathbb{R}$
Bld f = $\{k\}$
Grafiek van f (voor k = 2 getekend)



Neem een willekeurig punt a op de X-as; f(a) = k.
Voor elke ε-omgeving van k vinden we een δ-omgeving van a (δ willekeurig klein of groot) zodat voor elk getal $x \in]a - \delta; a + \delta[$ geldt dat $f(x) = k \in]k - \varepsilon; k + \varepsilon[$
Wegens de *willekeur* van a is de constante functie overal continu.

2.6. De identieke afbeelding is continu

De identieke afbeelding $1_{\mathbb{R}}$ beeldt x op zichzelf af.

$1_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x$

Dit is een lineaire functie met als grafiek een rechte door de oorsprong.
In A.C.O. 5 bewijzen we grafisch dat deze functie continu is. Wij geven hier een bewijs steunend op de ε-δ-vorm van de definitie van continuïteit van f in $a \in \mathbb{R}$.
M.a.w.,

T.B.

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+ : \exists \delta \in \mathbb{R}_0^+ : |x - a| < \delta \Rightarrow |1_{\mathbb{R}}(x) - 1_{\mathbb{R}}(a)| < \varepsilon$

Bewijs

$|1_{\mathbb{R}}(x) - 1_{\mathbb{R}}(a)| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \quad |x - a| < \varepsilon \qquad$ (Definitie van $1_{\mathbb{R}}$)

Stellen we dus $\delta = \varepsilon$ dan bekomen we

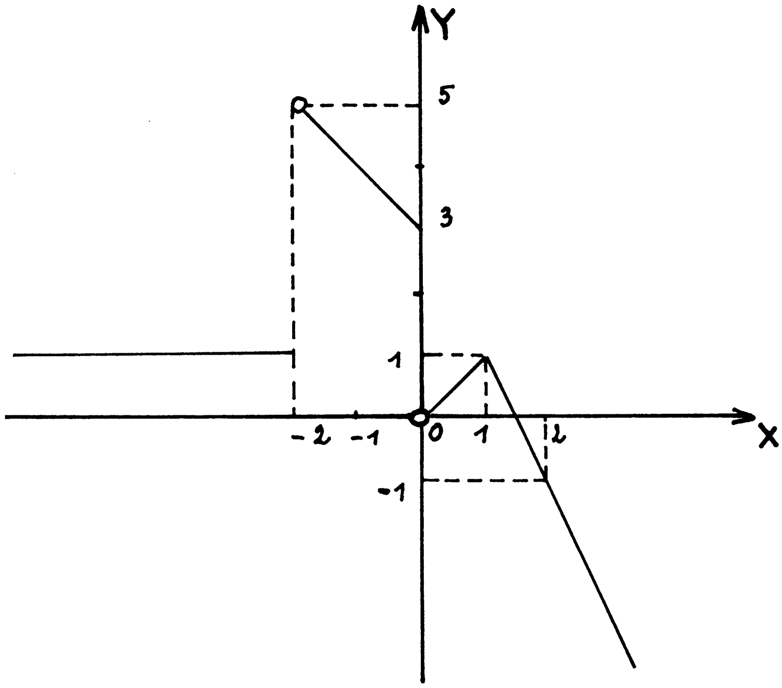
$|x - a| < \delta \Rightarrow |1_{\mathbb{R}}(x) - 1_{\mathbb{R}}(a)| = |x - a| < \varepsilon$

A.C.O. 5

Bewijs grafisch dat $1_{\mathbb{R}}$ continu is in een willekeurig punt $a \in \mathbb{R}$.

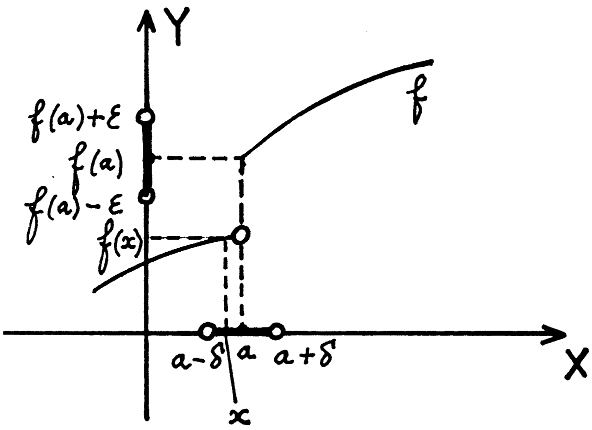
OPLOSSINGEN A.C.O.

1. Grafiek van f

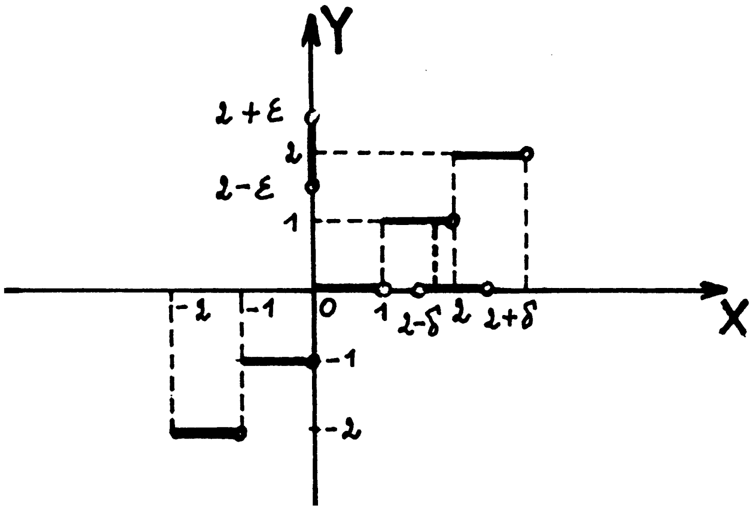


De functie f is discontinu in – 2 en in 0.

2. De functie f is discontinu in a.
   Als het interval]f(a) – ε; f(a) + ε[kleiner genomen wordt, dan is het onmogelijk op de X-as een omgeving]a – δ; a + δ[van a te vinden zodat elk element x in]a – δ; a + δ[afgebeeld wordt in de gekozen omgeving van f(a). De elementen in]a – δ; a[worden niet afgebeeld *in* de gekozen ε-omgeving van f(a) : zie f(x) in de volgende grafiek :



3. Discontinuïteit van $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to G(x)$ in 2.



Punten van $]2 - \delta; 2[$ worden afgebeeld in 1, dus buiten de gekozen ε-omgeving van $2 = f(2)$. Dit geldt voor elke ε-omgeving van $f(2)$.

4. Er moet voldaan zijn aan

$$|f(x) - f(2)| < \varepsilon$$

of $\quad |4x - 3 - 5| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \quad |4x - 8| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \quad |4(x - 2)| < \varepsilon$

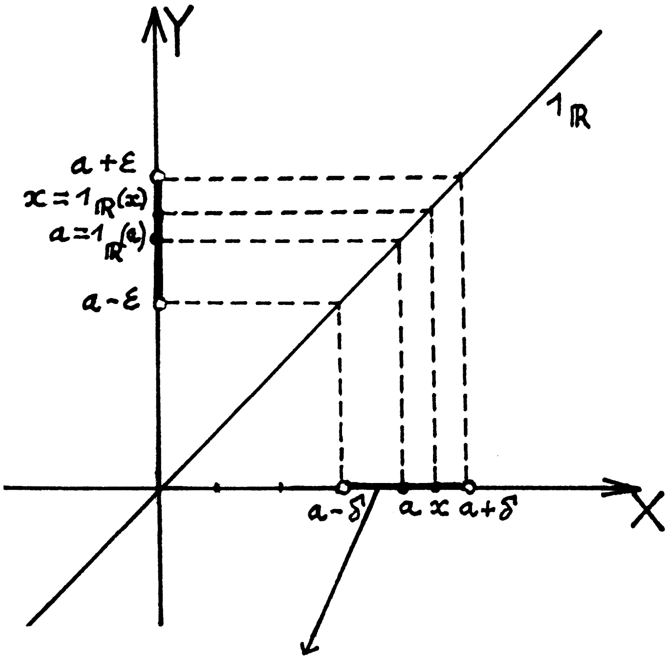
$\Leftrightarrow \quad 4|x - 2| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \quad |x - 2| < \dfrac{\varepsilon}{4} = \delta$

Dus, $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+ : \exists\, \delta \in \mathbb{R}_0^+ : |x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(2)| < \varepsilon$
M.a.w. f is continu in 2.

5. $1_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x$

x	0	1	2
$1_{\mathbb{R}}(x)$	0	1	2



Hier vinden we grafisch dat $\delta = \varepsilon$ voldoet.

Te onthouden

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to f(x)$ is *continu* in $a \in$ Dom f als en slechts als voor *elke* ε-omgeving $]f(a) - \varepsilon; f(a) + \varepsilon[$ van f(a) een δ-omgeving $]a - \delta; a + \delta[$ van a *bestaat* zodat elke x in $]a - \delta; a + \delta[$ afgebeeld wordt in $f(x) \in\ ]f(a) - \varepsilon; f(a) + \varepsilon[$.

Is hier niet aan voldaan, dan is f *discontinu* in a.
Ook als $a \notin$ Dom f noemen we f discontinu in a.

ε-δ-vorm : f is continu in $a \in \mathbb{R}$ als en slechts als
$\forall\, \varepsilon > 0$ (of $\varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$) : $\exists\, \delta \in \mathbb{R}_0^+ : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

f is *links continu* in $a \in$ Dom f als en slechts als
$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+ : \exists\, \delta \in \mathbb{R}_0^+ : a - \delta < x \leq a \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

f is *rechts continu* in $a \in$ Dom f als en slechts als
$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+ : \exists\, \delta \in \mathbb{R}_0^+ : a \leq x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Is f continu in $\mathbb{R}$ dan wordt f een *continue functie* genoemd.

De constante functie is continu.
De identieke afbeelding $1_{\mathbb{R}}$ is continu.

Continuïteit van f in $a \in \mathbb{R}$ onderzoeken we *grafisch*, ofwel met de *ε-δ-vorm* van de definitie van continuïteit van f in $a \in \mathbb{R}$.

VERWIJZING NAAR DE TAAK

Kijken we de definities uit dit hoofdstuk nog eens grondig na, samen met de gegeven voorbeelden. Opgaven 6 en 7 van de taak kunnen we dan mooi oplossen.

Hoofdstuk 3
Eigenschappen van continue functies

3.1. Inleiding

In 2.1. vermelden we reeds de functies
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^3 - 7x + 6$ (veeltermfunctie genoemd)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \dfrac{2x-1}{x+2}$ (rationale functie genoemd)

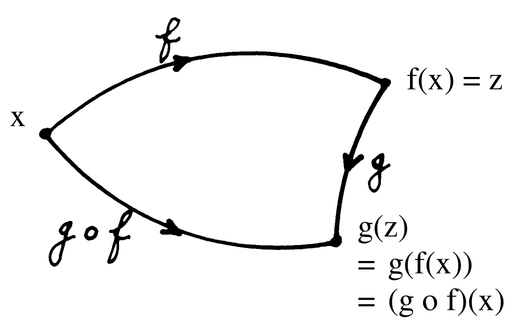
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \sin 2x$ (een goniometrische functie).
De goniometrische functies komen in een later lespakket aan bod.
In dit hoofdstuk geven we een antwoord op de vraag :
Zijn de eerste twee functies continu in 3, in – 2, ... ?
Deze vragen beantwoorden we in dit hoofdstuk, niet met de grafische definitie van continuïteit (we kennen de grafieken van deze functies nog niet); ook de ε-δ-definitie is meestal niet aangewezen omdat het rekenwerk veel te ingewikkeld wordt. We steunen wel op een reeks van stellingen waarbij we van strenge bewijzen afzien. De bouwstenen hebben we in vorig hoofdstuk bewezen : de constante functie is continu (2.5.); de identieke afbeelding is continu (2.6.).

3.2. Bewerkingen met functies. Definities.

Is $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to f(x)$
en $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to g(x)$
en $r \in \mathbb{R}$
dan definiëren we de volgende bewerkingen.

3.2.1. Samenstellen van functies.

$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to (g \circ f)(x) = g(f(x))$
(g na f)



Voorbeeld

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 2x - 1$$
$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^3$$
Dan $g \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to (2x-1)^3$

Zo ook is $f \circ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 2x^3 - 1$

3.2.2. Optellen van functies.

$$f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to (f+g)(x) \overset{\text{def.}}{=} f(x) + g(x)$$

Voorbeeld

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^2$$
$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 3x - 1$$
Dan is $f + g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^2 + 3x - 1$

3.2.3. Product van een functie met een reëel getal.

$$rf : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to (rf)(x) \overset{\text{def.}}{=} r \cdot f(x)$$

Voorbeeld

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^2$$
$$r = -\frac{1}{4}$$
Dan is $rf: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to -\frac{1}{4}x^2$

3.2.4. Product van twee functies ; quotiënt van twee functies.

$$f \cdot g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to (f \cdot g)(x) \overset{\text{def.}}{=} f(x) \cdot g(x)$$

$$\frac{f}{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \left(\frac{f}{g}\right)(x) \overset{\text{def.}}{=} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Voorbeeld

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^2$$
$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 3x - 1$$
Dan is $f \cdot g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 3x^3 - x^2$

en $\frac{f}{g}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \frac{x^2}{3x-1}$

3.3. Stellingen. Toepassingen.

De stellingen die we nu behandelen geven we zonder bewijs.
Belangrijker zijn de toepassingen ervan.

3.3.1. Samenstellen van continue functies

Stelling
Is de functie f continu in a en is de functie g continu in f(a) = b, dan is g o f continu in a.

Toepassing

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x - 2$ is continu in 1
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to |x|$ is continu in f(1) = – 1
Dus, $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to |x - 2|$ is continu in 1.

3.3.2. Optellen van continue functies

Stelling
Is f continu in a en is g continu in a, dan is ook hun som f + g continu in a.

Toepassing

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 2$ is continu in 3 (Zie 2.5., constante functie)
$g = 1_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x$ is continu in 3
Dus, $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x + 2$ is continu in 3.
Zo ook is $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x + 2$ continu in $a \in \mathbb{R}$, m.a.w.,
$f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x + 2$ is een continue functie.

A.C.O. 1

Is $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^4$
en $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x - 2$
dan is
a) $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \ldots$
b) $\frac{f}{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \ldots$
c) $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \ldots$
d) $f \cdot g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \ldots$
e) $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \ldots$
Vul de functievoorschriften in.

A.C.O. 2

Van welke functies in de opgave kunnen we de continuïteit in $\mathbb{R}$ bewijzen, steunend op 2.5., 2.6. en op de stellingen in 3.3.1. en 3.3.2. ?

$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x + 3$

$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 2x$

$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 2x + 3$

$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \frac{x}{3} - 1$

3.3.3. Product van een continue functie met een reëel getal

Stelling

Is $r \in \mathbb{R}$ en is f continu in $a \in \mathbb{R}$, dan is ook rf continu in a.

Toepassing

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x$ is continu in $a \in \mathbb{R}$ (Zie 2.6.)

$2f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 2x$ is ook continu in $a \in \mathbb{R}$ volgens de stelling in 3.3.3. of in 3.3.2. (Zie ook A.C.O. 2)

$\frac{1}{3}f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \frac{1}{3}x$ is continu in $a \in \mathbb{R}$ volgens de stelling in 3.3.3.

3.3.4. Product van continue functies

Stelling

Is f continu in a en is g continu in a, dan is ook hun product $f \cdot g$ continu in a.

Toepassingen

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x + 2$ is continu in $a \in \mathbb{R}$ (Zie 3.3.2.)

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \frac{1}{3}x$ is continu in $a \in \mathbb{R}$ (Zie 3.3.3.)

Dus, volgens deze stelling is

$f \cdot g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x$ continu in $a \in \mathbb{R}$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$ geldt : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^n$ is continu in $a \in \mathbb{R}$.

Zo is

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^3$ continu in $a \in \mathbb{R}$, want,

$f = 1_{\mathbb{R}} \cdot 1_{\mathbb{R}} \cdot 1_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x \cdot x \cdot x = x^3$

en $1_{\mathbb{R}}$ is continu in $a \in \mathbb{R}$ volgens 2.6.

c) Elke *veeltermfunctie* is *continu* in $a \in \mathbb{R}$ en is dus een *continue functie*.

Zo is
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 3x^3 - 2x + 5$ een continue functie.

We kunnen dit als volgt bewijzen, steunend op de gegeven eigenschappen :
$1_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x$ is continu in $a \in \mathbb{R}$ (2.6.)

Dan is
$f_1 = 3 \cdot 1_{\mathbb{R}} \cdot 1_{\mathbb{R}} \cdot 1_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 3x^3$ continu in $a \in \mathbb{R}$
(volgens de eigenschappen in 3.3.4. en 3.3.3.)
en $f_2 = -2 \cdot 1_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to -2x$ is continu in $a \in \mathbb{R}$ (3.3.3.)

Bijgevolg is
$f = f_1 + f_2 + 5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 3x^3 - 2x + 5$ continu in $a \in \mathbb{R}$ (3.3.2.).

A.C.O. 3

Bewijs, steunend op de eigenschappen, dat
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \frac{1}{3}x^4 - x^2 + 1$
een continue functie is.

d) Merken we nog op dat de stelling in 3.3.3. een bijzonder geval is van de stelling in 3.3.4 :

Is in 3.3.4. g de constante functie
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to r$
dan bekomen we de stelling in 3.3.3.

3.3.5. Quotiënt van continue functies

Stelling

Is f continu in a, is g continu in a en $g(a) \neq 0$, dan is ook $\frac{f}{g}$ continu in a.

Toepassingen

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^2$ is continu in $a \in \mathbb{R}$ (3.3.4.)
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^2 + 1$ is continu in $a \in \mathbb{R}$ (3.3.4., 3.3.2.)
en $g(a) = a^2 + 1 \geq 1$, of, $g(a) \neq 0$

Volgens deze stelling is dus

$\frac{f}{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \frac{x^2}{x^2+1}$ continu in $a \in \mathbb{R}$.

b) Is $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \frac{x^3}{x-2}$ continu in 5 ?

Ja, want

$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^3$ is continu in 5 (3.3.4.)

$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x - 2$ is continu in 5 (3.3.2.)

$f_2(5) = 5 - 2 = 3 \neq 0$

Dus $f = \frac{f_1}{f_2}$ is continu in 5 volgens de stelling in 3.3.5.

c) Voor welke reële getallen a is

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \frac{x^3}{x-2}$ discontinu ?

Herhalen we de redenering uit b) : f_1 en f_2 zijn continu in $a \in \mathbb{R}$ met a een willekeurig reëel getal.

We moeten echter volgens 3.3.5. die getallen a uitsluiten waarvoor

$$\begin{aligned} & f_2(a) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & a - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & a = 2 \end{aligned}$$

M.a.w.

f is continu in $a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

f is discontinu in 2

Nu is Dom f = $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

Of, f is continu in $a \in$ Dom f.

f is discontinu in 2 : $2 \notin$ Dom f.

De functie f is een functie waarbij in het voorschrift veeltermen in teller en noemer staan. Zo'n functie wordt een *rationale functie* genoemd.

We stellen vast dat een *rationale functie f* continu is in elk punt van *Dom f*.

In 1.3.3. hebben we Dom f leren bepalen.

A.C.O. 4

Vind de deelverzameling van $\mathbb{R}$ waarin f continu is als

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \frac{x^2+1}{x^2-5x+6}$.

3.3.6. Continuïteit van irrationale functies

Een functie f is irrationaal als in f(x), x onder een wortelteken voorkomt.

Stelling

De irrationale functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \sqrt{x}$ is continu in $a \in$ Dom $f = \mathbb{R}^+$

De irrationale functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \sqrt[3]{x}$ is continu in $a \in$ Dom $f = \mathbb{R}$.

Toepassing

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^2 - 4$ is continu in 3 (Zie 3.3.4. toepassing c).

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \sqrt{x}$ is continu in 5 want $5 \in$ Dom g (stelling in 3.3.6.).

Uit 3.3.1. volgt nu dat $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \sqrt{x^2 - 4}$ continu is in 3.

In welke punten a is g o f continu ?

f is continu in $a \in \mathbb{R}$; $f(a) = a^2 - 4$.

g is continu in $\mathbb{R}^+$, dus is volgens 3.3.1. g o f continu in a als $a^2 - 4 \geq 0$, dus in $a \in$ $]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$.

Ook is Dom(g o f) = $]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$. Dit kunnen we narekenen ?

Zie o.a. A.C.O. 5 in hoofdstuk 1 van dit lespakket.

Dus : $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \sqrt{x^2 - 4}$ is continu in $a \in$ Dom(g o f).

A.C.O. 5

Vind de deelverzameling van $\mathbb{R}$ waarin f continu is als

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

A.C.O. 6

Vind de deelverzameling van $\mathbb{R}$ waarin de volgende functie continu is :

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^3 - 7x + 6$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \dfrac{2x - 1}{x + 2}$

(Dit zijn functies uit de inleiding 3.1.).

OPLOSSINGEN A.C.O.

1. a) $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^4 + x - 2$
   b) $\frac{f}{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \frac{x^4}{x-2}$
   c) $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^4 - 2$
   d) $f \cdot g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^5 - 2x^4$
   e) $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to (x-2)^4$

2. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x + 3$ is continu :
   $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 3$ is continu in $a \in \mathbb{R}$ (constante functie 2.5.)
   $1_\mathbb{R} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x$ is continu in $a \in \mathbb{R}$ (Zie 2.6.)
   Dus $f_1 = f + 1_\mathbb{R}$ is continu in $a \in \mathbb{R}$ volgens 3.3.2.
   $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 2x$ is continu want $f_2 = 1_\mathbb{R} + 1_\mathbb{R}$, pas 2.6. en 3.3.2. toe.
   $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 2x + 3$ is continu want $f_3 = f_2 + f$ (stelling 3.3.2. toepassen)
   $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \frac{x}{3} - 1$
   Die continuïteit kunnen we vooralsnog niet bewijzen.
   Zie de stelling in 3.3.3.

3. $f_1 = \frac{1}{3} \cdot 1_\mathbb{R} \cdot 1_\mathbb{R} \cdot 1_\mathbb{R} \cdot 1_\mathbb{R} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \frac{1}{3}x^4$ is continu in $a \in \mathbb{R}$ (3.3.4. en 3.3.3.)
   $f_2 = -1 \cdot 1_\mathbb{R} \cdot 1_\mathbb{R} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to -x^2$ is continu in $a \in \mathbb{R}$ (3.3.4. en 3.3.3.)
   dus $f = f_1 + f_2 + 1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \frac{1}{3}x^4 - x^2 + 1$ is continu in $a \in \mathbb{R}$.
   De functie f is dus een continue functie.

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \frac{x^2 + 1}{x^2 - 5x + 6}$ is een rationale functie en is dus continu in $a \in$ Dom f
   Nulpunten van $x^2 - 5x + 6$ zijn 2 en 3.
   Dus Dom f = $\mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$
   f is continu in $a \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$

5. Een irrationale functie f is continu in $a \in$ Dom f.
   $a \in$ Dom f $\Leftrightarrow a^2 - 9 > 0$
   $\Leftrightarrow a \in \left]-\infty; -3\right[\cup \left]3; +\infty\right[$
   f is dus continu in $a \in \left]-\infty; -3\right[\cup \left]3 ; +\infty\right[$
6. a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^3 - 7x + 6$ is een veeltermfunctie en is dus continu in $\mathbb{R}$
   (Dom f = $\mathbb{R}$).

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \dfrac{2x-1}{x+2}$ is een rationale functie en is dus continu in $a \in$ Dom

$f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
f is discontinu in $-2 : -2 \notin$ Dom f

Te onthouden

Is f continu in a en is g continu in f(a) = b, dan is g o f continu in a
(*Samenstellen* van continue functies.).

Is f continu in a en is g continu in a, dan is f + g continu in a
(*Som* van continue functies.).

Is f continu in a en $r \in \mathbb{R}$, dan is ook rf continu in a
(*Product* van een continue functie *met een reëel getal*.).

Is f continu in a en is g continu in a, dan is $f \cdot g$ continu in a
(*Product* van continue functies.).

Is f continu in a en is g continu in a en $g(a) \neq 0$, dan is ook $\dfrac{f}{g}$ continu in a
(*Quotiënt* van continue functies.).

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \sqrt{x}$ is continu in $a \in$ Dom $f = \mathbb{R}^+$.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \sqrt[3]{x}$ is continu in $a \in$ Dom $f = \mathbb{R}$.

Elke *veeltermfunctie* is een continue functie.
Een *rationale functie* f is continu in $a \in$ Dom f
Een *irrationale functie* f is continu in $a \in$ Dom f

VERWIJZING NAAR DE TAAK

Hebben we de voorbeelden goed verwerkt en de A.C.O. goed kunnen oplossen ?
Dan lossen we de laatste opgave van deze taak ook met succes op !